

Η τριβή στην κύλιση τροχού

Στο κεφάλαιο της δυναμικής στην κίνηση στερεού σώματος και συγκεκριμένα κατά την κύλιση τροχού, πρωτεύοντα ρόλο έχει η τριβή που εμφανίζεται στην επαφή μεταξύ τροχού και δαπέδου κύλισης.

Κατά την επεξεργασία της κύλισης τροχού, προκύπτουν ερωτήματα στα οποία δεν έχουμε τη δυνατότητα να δώσουμε απαντήσεις χωρίς την εισαγωγή και άλλης μιας μορφής τριβής, της **τριβής κύλισης**.

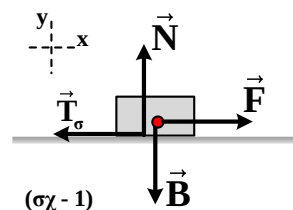
Αρχικά θεωρείται αναγκαία η σύντομη αναφορά στις ήδη γνωστές μορφές τριβής που αναφέρονται ως στατική και τριβή ολίσθησης.

Τριβή: Στατική-Ολίσθηση

Στη συνέχεια με τον όρο τριβή θα θεωρείται η δύναμη η οποία ασκείται στη διαχωριστική επιφάνεια δυο σωμάτων τα οποία βρίσκονται σε επαφή, όταν το ένα κινείται ή τείνει να κινηθεί σχετικά με το άλλο.

Στατική τριβή.

Στο (σχ-1) φαίνεται ένα σώμα στο οποίο ενώ αναπτύσσεται εξωτερική οριζόντια δύναμη F , αυτό παραμένει ακίνητο. Αυτό μας αναγκάζει να δεχθούμε την ύπαρξη μιας δύναμης στην επαφή μεταξύ σώματος και δαπέδου, η οποία αντιστέκεται στην κίνηση του σώματος, ονομάζεται τριβή και επειδή το σώμα μένει ακίνητο λέγεται στατική τριβή.



Επειδή το σώμα ισορροπεί ισχύουν:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{ή} \quad F = T_\sigma \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad N = B$$

Πειραματικά βρέθηκε ο νόμος στατικής τριβής

$$T_\sigma = \mu_\sigma \cdot N$$

όπου μ_σ ονομάζεται συντελεστής στατικής τριβής και είναι αδιάστατο μέγεθος.

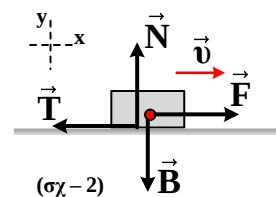
Η στατική τριβή παίρνει τιμές που κυμαίνονται από το μηδέν μέχρι μια μέγιστη τιμή, που ονομάστηκε μέγιστη στατική τριβή $T_{\sigma \text{ (max)}}$ ή οριακή T_{op} , και είναι αυτή στην οποία το σώμα είναι «έτοιμο» να ολισθήσει.

Στην οριακή κατάσταση ισχύει ο νόμος οριακής στατικής τριβής

$$T_{\text{op}} = \mu_{\text{op}} \cdot N \quad \text{όπου} \quad \text{ισχύει} \quad T_{\text{op}} \geq T_\sigma \quad \text{οπότε} \quad \text{είναι} \quad \text{και} \quad \mu_{\text{op}} \geq \mu_\sigma$$

Τριβή ολίσθησης

Τριβή ολίσθησης (σχ-2) θεωρείται η δύναμη τριβής που δέχεται ένα σώμα από την επιφάνεια με την οποία βρίσκεται σε επαφή, όταν αυτό ολισθαίνει πάνω της.



Παρατηρήθηκε ότι μετά την έναρξη της ολίσθησης, αν αφήσουμε την ελάχιστη απαιτούμενη δύναμη που χρειάστηκε να ξεκινήσει το σώμα – η οποία είναι ίση με την μέγιστη στατική T_{op} – τότε το σώμα ολισθαίνει επιταχυνόμενο και για να έχουμε ισοταχή ολίσθηση, πρέπει να μειώσουμε την ασκούμενη δύναμη.

Η παραπάνω πειραματική διαπίστωση μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι:

Η τριβή ολίσθησης T μεταξύ δύο σωμάτων έχει μικρότερο μέτρο από τη μέγιστη στατική T_{op} (οριακή) τριβή μεταξύ τους.

$$T < T_{op}$$

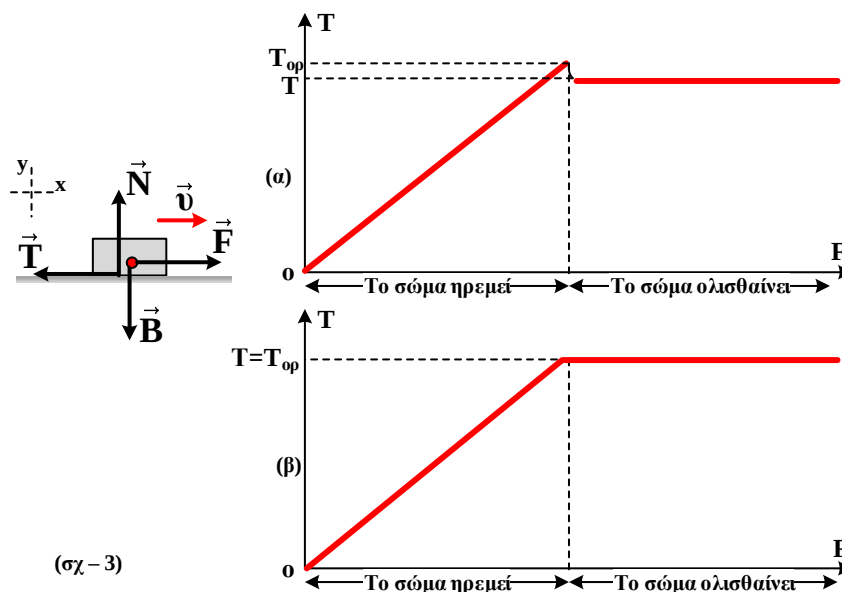
Για την τριβή ολίσθησης ισχύουν οι εξής εμπειρικοί νόμοι

- Είναι ανεξάρτητη του εμβαδού των επιφανειών με τις οποίες βρίσκονται σε επαφή τα σώματα.
- Δεν εξαρτάται από τη σχετική ταχύτητα μεταξύ των σωμάτων που ολισθαίνουν.
- Εξαρτάται από τη φύση των επιφανειών που βρίσκονται σε επαφή (συντελεστής τριβής μ).
- Είναι ανάλογη του μέτρου της κάθετης στην επιφάνεια επαφής δύναμη N , που εμφανίζεται μεταξύ των σωμάτων τα οποία αλληλοσυμπιέζονται.

Η τιμή της τριβής ολίσθησης προκύπτει από το νόμο της τριβής ολίσθησης

$$T = \mu \cdot N$$

όπου T η τριβή ολίσθησης και μ ο συντελεστής τριβής ολίσθησης που εξαρτάται από τη φύση των επιφανειών. Το πειραματικό διάγραμμα, του μέτρου της τριβής σε σχέση με το μέτρο της δύναμης F , παρουσιάζεται στο (σχ-3α).



Παρατηρούμε πειραματικά ότι όσο το σώμα δεν κινείται (στατική τριβή), η τριβή αυξάνεται όσο αυξάνεται και η δύναμη F . Όταν το σώμα αρχίσει να κινείται (τριβή ολίσθησης), η τριβή διατηρείται σταθερή και είναι λίγο μικρότερη από την οριακή τριβή.

Έτσι στην πραγματικότητα ισχύει:

$$T < T_{op} \text{ και } \mu < \mu_{op}$$

Συνήθως θεωρούμε $T=T_{op}$ δηλαδή την τριβή ολίσθησης περίπου ίση με τη μέγιστη στατική (οριακή) τριβή όπως φαίνεται στο (σχ-3β) όπου

$$T \simeq T_{op}$$

το ίδιο συμβαίνει και για τους συντελεστές τριβής οι οποίοι προσεγγίζονται ίσοι

$$\mu \simeq \mu_{op}$$

Να τονιστεί ακόμη για τους συντελεστές τριβής ότι τόσο ο μ όσο και ο μ_o συνήθως είναι μικρότεροι της μονάδας όμως μπορούν να υπερβούν (λίγο) και τη μονάδα σε εξαιρετικές περιπτώσεις.

Ο ρόλος της στατικής τριβής στην κύλιση τροχού.

Στο πρόβλημα της κύλισης τροχού (σχ 4), κύριο ρόλο «παίζει» κυρίως η στατική τριβή αλλά και η τριβή ολίσθησης για την οποία πρέπει να γνωρίζουμε τα εξής:

- Επειδή η κύλιση προκαλείται από τη στατική τριβή, για να έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση πρέπει η τιμή της τριβής να είναι:

$$T < T_{ol} \text{ ή } T < \mu \cdot N \text{ όπου } \mu \text{ συντελεστής τριβής ολίσθησης.}$$

- Όταν έχουμε κύλιση τροχού (χωρίς ολίσθηση) ισχύουν:

$$\text{από τη μεταφορική κίνηση } \Sigma F = m \cdot a_k$$

$$\text{από την περιστροφική κίνηση περί το κέντρο μάζας είναι } \Sigma \tau_k = I_k \cdot a_\gamma$$

ενώ ακόμη ισχύουν:

$$v_k = \omega \cdot R, \quad a_k = a_\gamma \cdot R, \quad T < T_{ol} \text{ δηλαδή } T < \mu \cdot N \text{ όπου } \mu \text{ συντελεστής τριβής ολίσθησης.}$$

- Όταν έχουμε κύλιση με ολίσθηση τροχού ισχύουν οι σχέσεις:

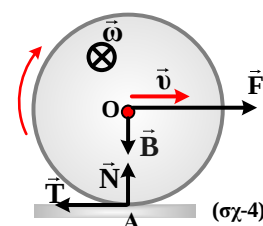
$$\text{από τη μεταφορική κίνηση } \Sigma F = m \cdot a_k$$

$$\text{από την περιστροφική κίνηση περί το κέντρο μάζας } \Sigma \tau_k = I_k \cdot a_\gamma$$

τότε ισχύει και ο νόμος για την τριβή ολίσθησης $T = \mu \cdot N$ όπου μ συντελεστής τριβής ολίσθησης.

- Η συνθήκη για να σταματήσει η κύλιση με ολίσθηση και να αρχίσει μόνο η κύλιση είναι:

$$v_k = \omega \cdot R, \quad a_k = a_\gamma \cdot R.$$



Ακολουθεί εφαρμογή στην οποία φαίνεται πώς σε μια κύλιση τροχού, εξασφαλίζεται η συνθήκη ώστε να συμβαίνει μόνο κύλιση χωρίς ολίσθηση.

Εφαρμογή 1^η (Τροχός ανέρχεται κυλιόμενος σε κεκλιμένο επίπεδο.)

Τροχός μάζας $m=10\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,5\text{m}$ ξεκινάει από την ηρεμία κινούμενος πάνω σε εκτεταμένο πλάγιο επίπεδο γωνίας κλίσης θ , με την επίδραση σταθερής δύναμης $F=90\text{N}$ όπως φαίνεται στο σχήμα.

Ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ανερχόμενος κατά μήκος του πλάγιου επιπέδου. Να υπολογίσετε:

α. το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας K του τροχού.

β. το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του τροχού.

γ. το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του τροχού όταν έχει εκτελέσει $N=\frac{100}{\pi}$ περιστροφές.

δ. για ποιες τιμές του συντελεστή τριβής ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

Δίνονται για τον τροχό: $I_K = \frac{1}{2} m \cdot R^2$, $\sin\theta = 0,8$ και $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση:

Ο τροχός εκτελεί κύλιση - σύνθετη κίνηση - την οποία αναλύουμε σε μεταφορική και περιστροφική περί το κέντρο μάζας του K .

α. Από τη μεταφορική κίνηση:

$$\Sigma F_x = m \cdot a_K \quad \text{ή} \quad F - B_x - T = m a_K \quad \text{ή} \quad F - mg \sin\theta - T = m a_K \quad (1)$$

Για την περιστροφή περί το κέντρο μάζας του τροχού:

$$\Sigma \tau_K = I_K \cdot \alpha_\gamma \quad \text{ή} \quad T \cdot R = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \cdot \alpha_\gamma \quad \text{άρα} \quad T = \frac{1}{2} m \cdot R \cdot \alpha_\gamma$$

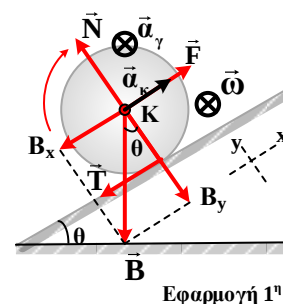
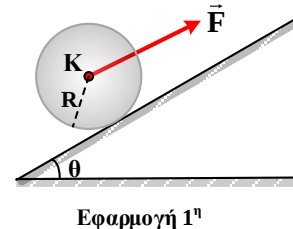
στην κύλιση ισχύει $\alpha_\gamma \cdot R = a_K$ έτσι $T = \frac{1}{2} m \cdot a_K$ και από την (1) έχουμε

$$F - mg \sin\theta - \frac{1}{2} m \cdot a_K = m \cdot a_K \quad \text{από όπου είναι} \quad a_K = 2\text{m/s}^2$$

β. Επειδή στην κύλιση ισχύει $\alpha_\gamma \cdot R = a_K$ προκύπτει $\alpha_\gamma = 4 \text{ rad/s}^2$.

γ. Η περιστροφική κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη έτσι:

$$\omega = \alpha_\gamma \cdot t, \quad \Delta\varphi = \frac{1}{2} \alpha_\gamma \cdot t^2 \quad \text{προκύπτει} \quad \omega = \sqrt{2 \cdot \alpha_\gamma \Delta\varphi} \quad (2) \quad \text{όμως}$$



$$\Delta\phi = N \cdot 2\pi = 200 \text{ rad} \text{ οπότε από την (2) έχουμε } \omega = 40 \text{ rad/s}$$

δ. Στην ερώτηση (α) βρέθηκε $T = \frac{1}{2} m \cdot a_{\kappa}$ ή $T = 10 \text{ N}$

Αναφέρθηκε ότι η συνθήκη ώστε ο τροχός να κυλιέται χωρίς ολίσθηση είναι:

$$T < \mu \cdot N \text{ ή } T < \mu \cdot mg \sin\theta \text{ άρα } \mu > \frac{T}{mg \cdot \sin\theta} \text{ οπότε } \mu > 0,125$$

Δηλαδή για κάθε τιμή του $\mu > 0,125$ ο τροχός μόνο θα κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει.

Τριβή κύλισης

Θα αναφερθεί ενδεικτικά ένα παράδειγμα από το οποίο προκύπτει η αναγκαιότητα εισαγωγής της τριβής κύλισης.

Έστω ένας τροχός (σχ-5) βάλλεται σε οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα v_0 τέτοια ώστε να



κυλιέται (χωρίς ολίσθηση) περιστρεφόμενος με αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0 για την οποία να ισχύει $v_0 = \omega_0 \cdot R$.

Τότε το σημείο επαφής A έχει ταχύτητα $v_A = v_0 - v_{\epsilon}$ όπου $v_{\epsilon} = \omega_0 \cdot R$ η επιτροχία ταχύτητα, άρα $v_A = v_0 - \omega_0 \cdot R$ ή $v_A = 0$ δηλαδή το σημείο A έχει στιγμιαία ταχύτητα μηδέν, άρα δεν ολισθαίνει οπότε ο τροχός μόνο κυλιέται.

Στην ιδανική περίπτωση ο τροχός θα κυλιέται επ' άπειρον αφού καμία ροπή δεν ασκείται πάνω του ώστε να μεταβάλλει την γωνιακή του ταχύτητα.

Στην πραγματικότητα όμως παρατηρούμε ότι η γωνιακή ταχύτητα μειώνεται συνεχώς μέχρι να μηδενιστεί. Αυτό σημαίνει ότι στον τροχό ασκείται ροπή που αντιτίθεται στην κύλιση. Αυτή η ροπή ονομάζεται **τριβή κύλισης**.

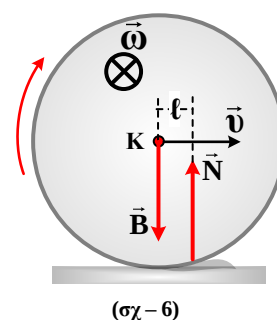
Στην ιδανική περίπτωση κύλισης (όπως στο σχήμα) ο τροχός και το δάπεδο είναι απολύτως ανένδοτα άρα η επαφή γίνεται σε ένα σημείο, δηλαδή δεν παρουσιάζουν καμία παραμόρφωση. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η κάθετη δύναμη N από το δάπεδο στον τροχό, να περνάει από τον άξονα του τροχού οπότε δεν υπάρχει καμία ροπή αντίστασης και έτσι αυτός , θεωρητικά κυλιέται επ' άπειρον.

Στην πραγματικότητα όμως υπάρχει πάντα κάποια παραμόρφωση στον τροχό και στο δάπεδο (σχ-6), οπότε η επαφή γίνεται σε μια μικρή επιφάνεια και η δύναμη N δεν διέρχεται από το κέντρο K του τροχού αλλά είναι μετατοπισμένη.

Έτσι το βάρος $\vec{B}$ του τροχού και η δύναμη $\vec{N}$, σχηματίζουν ζεύγος δυνάμεων με ροπή,

$$\tau = \ell \cdot N$$

που αντιτίθεται στην κύλιση η οποία (ροπή) ονομάζεται **τριβή κύλισης** και η σταθερά ℓ ορίζεται ως **συντελεστής τριβής κύλισης**.



● Αφού λοιπόν κατά την κύλιση τροχού έχουμε και την τριβή κύλισης (ροπή), μπορούμε να δικαιολογήσουμε γιατί η διατήρηση μιας ισοταχούς κύλισης τροχού, απαιτεί την εφαρμογή εξωτερικής ροπής αντίθετης της τριβής κύλισης.

Για παράδειγμα στον τροχό του αυτοκινήτου, τέτοια ροπή εφαρμόζει ο κινητήρας στον άξονα των τροχών του, ακόμη και όταν έχουμε ισοταχή κύλιση.

● Αν εξετάσουμε ενεργειακά την ισοταχή κύλιση τροχού σε μαλακό δάπεδο, διαπιστώνουμε ότι για να διατηρήσουμε την ταχύτητα του σταθερή, χρειάζεται διαρκής παροχή ενέργειας, διότι η τριβή κύλισης (όπου υπάρχει) έχει δαπανώμενο έργο.
Στο αυτοκίνητο αυτή την ενέργεια την παρέχει ο κινητήρας.

Όταν η κύλιση γίνεται σε απολύτως ανένδοτη επαφή με το δάπεδο, τότε έχουμε μόνο τη στατική τριβή, η οποία έχει συνολικά μηδενικό έργο διότι το σημείο επαφής, που είναι και το σημείο εφαρμογής της στατικής τριβής, στιγμιαία είναι ακίνητο. Τέτοια περίπτωση, με αμελητέα τριβή κύλισης έχουμε στους τροχούς σιδηροδρόμου οι οποίοι κυλίνουν στις σιδηροτροχιές.

● Μετά από αυτή τη μελέτη, να τονίσουμε μια βασική διαφορά μεταξύ της τριβής κύλισης που είναι ροπή, με τις τριβές στατική και ολίσθηση που είναι δυνάμεις.
Αυτό σημαίνει ότι δεν επιτρέπεται να γίνεται μεταξύ τους σύγκριση.

Ακολουθούν εφαρμογές στις οποίες φαίνεται πόσο υπαρκτή είναι η τριβή κύλισης, με τη βοήθεια της οποίας, εκτός των άλλων, γίνεται πλήρως κατανοητή η κύλιση τροχού.

Εφαρμογή 2^η (Γιατί στα φορτηγά αυτοκίνητα χρησιμοποιούμε τροχούς μεγάλης ακτίνας)
Έστω κυλινδρικός τροχός που κυλιέται με ισοταχή κίνηση σε οριζόντιο μαλακό δάπεδο.

Στο κέντρο του K εφαρμόζεται σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ = σταθ.

Δίνονται: Βάρος τροχού B, η ακτίνα του R, και ο συντελεστής τριβής κύλισης ℓ .

- Να σχεδιάσετε τον τροχό και να εφαρμόσετε πάνω του τις δυνάμεις που δέχεται.
- Να εφαρμόσετε του νόμους δυναμικής κατά την κίνηση του τροχού.
- Αφού αρχικά αποδείξετε ότι η τιμή της δύναμης F, είναι αντιστρόφως ανάλογη της ακτίνας R του τροχού, να δικαιολογήσετε γιατί τα φορτηγά κάνουν χρήση τροχών μεγάλης ακτίνας.

Λύση:

α. Στον τροχό αναπτύσσονται οι εξής δυνάμεις

- Εξωτερική κινητήρια δύναμη $\vec{F}$ = σταθ.
- Βάρος $\vec{B}$ τροχού.
- Στατική τριβή $\vec{T}$.
- Κάθετη αντίδραση $\vec{N}$.

Όλες οι δυνάμεις φαίνονται στο σχήμα.

β. Επειδή ο τροχός μεταφέρεται οριζόντια με σταθερή ταχύτητα (v = σταθ.) ισχύουν:

$$\Sigma F_x = 0 \text{ ή } F - T = 0 \text{ ή } F = T \quad (1)$$

Στον άξονα yy' δεν κινείται άρα $\Sigma F_y = 0$ ή $N - B = 0$ ή $N = B$ (2).

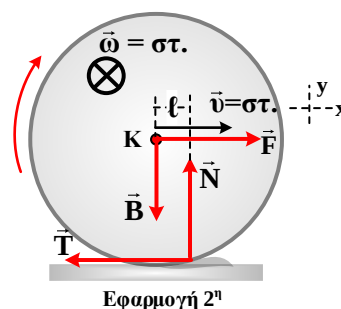
Η περιστροφή του τροχού γύρω από το κέντρο του γίνεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα

$\vec{\omega}$ = σταθ. άρα για την ολική ροπή ως προς K ισχύει $\Sigma \tau_K = 0$ ή $T \cdot R - N \cdot \ell = 0$ (3)

γ. Η σχέση $T \cdot R - N \cdot \ell = 0$ με τις (1), (2) γίνεται $F \cdot R = B \cdot \ell$ από όπου προκύπτει $F = \frac{\ell}{R} \cdot B$ (3)

από την οποία φαίνεται ότι

- Η δύναμη F είναι ανάλογη του βάρους B, δηλαδή στα μεγάλα φορτία χρειάζεται μεγαλύτερη κινητήρια δύναμη F.
- Η κινητήρια δύναμη F που απαιτείται, είναι αντιστρόφως ανάλογη της ακτίνας R που έχει ο τροχός. Έτσι δικαιολογείται και η χρήση τροχών μεγάλης ακτίνας στα φορτηγά αυτοκίνητα.



Εφαρμογή 3^η (Κύλιση τροχού με τριβή κύλισης)

Συμπαγής σφαίρα μάζας m και ακτίνας R κυλιέται χωρίς ολίσθηση, κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσεως ϕ ως προς τον ορίζοντα.

Να προσδιορίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας της όταν:

- η επιφάνεια επαφής σφαίρας και επιπέδου είναι ανένδοτη, δηλαδή ο συντελεστής τριβής κύλισης είναι μηδενικός,

β. η επιφάνεια επαφής των σωμάτων δέχεται μικρή παραμόρφωση όταν συμπιέζεται και ο συντελεστής τριβής κύλισης είναι ℓ .

Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς διαμετρικό άξονα είναι $I_K = \frac{2}{5} mR^2$

Λύση:

α. Ανένδοτη η επιφάνεια επαφής. (σχ-α).

Από τη μεταφορά του κ. μάζας είναι:

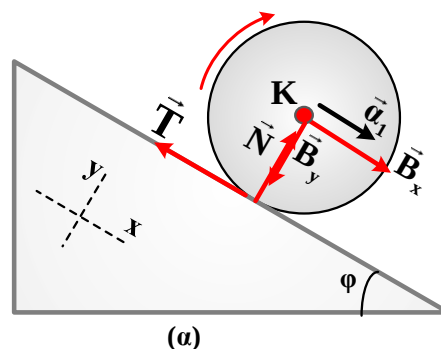
$$\Sigma F_x = m \cdot a_1 \text{ ή } B_x - T = m \cdot a_1 \text{ ή } mg \eta\mu\phi - T = m \cdot a_1 \quad (1)$$

Από περιστροφή περί το Κ έχουμε

$$\Sigma \tau_K = I_K \cdot \alpha_\gamma \text{ ή } T \cdot R = \frac{2}{5} m \cdot R^2 \cdot \alpha_\gamma, \text{ από την κύλιση ισχύει}$$

$$\alpha_\gamma \cdot R = a_1 \text{ έτσι } T = \frac{2}{5} m \cdot a_1 \text{ και από την (1) προκύπτει}$$

$$a_1 = \frac{5}{7} g \cdot \eta\mu\phi$$



β. Με παραμόρφωση στην επαφή (σχ-β) έχουμε και τριβή κύλισης με συντελεστή τριβής κύλισης ℓ .

Από τη μεταφορά του κ. μάζας είναι:

$$\Sigma F_x = m \cdot a_2 \text{ ή } B_x - T' = m \cdot a_2 \text{ ή } mg \eta\mu\phi - T' = m \cdot a_2 \quad (3)$$

Από περιστροφή περί το Κ έχουμε

$$\Sigma \tau_K = I_K \cdot \alpha'_\gamma \text{ ή } T' \cdot R - N \cdot \ell = I_K \cdot \alpha'_\gamma \quad (4)$$

Κατά τον άξονα yy' δεν κινείται άρα

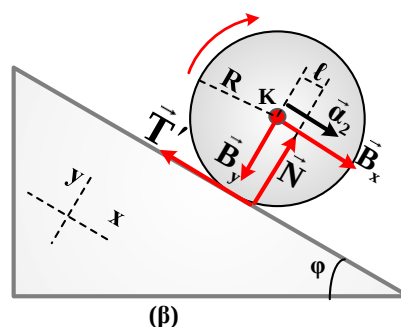
$$\Sigma F_y = 0 \text{ ή } N - B_y = 0 \text{ ή } N - mg \cdot \sigma\upsilon\nu\phi = 0 \text{ ή } N = mg \cdot \sigma\upsilon\nu\phi$$

$$\text{έτσι η σχέση (4) γίνεται } T' \cdot R - mg \cdot \ell \cdot \sigma\upsilon\nu\phi = \frac{2}{5} m \cdot R^2 \alpha'_\gamma \text{ και}$$

$$\text{από την κύλιση ισχύει } \alpha'_\gamma \cdot R = a_2 \text{ οπότε η σχέση (3) γίνεται } g \cdot R \cdot \eta\mu\phi - g \cdot \ell \cdot \sigma\upsilon\nu\phi = \frac{7}{5} a_2 R \text{ ή}$$

$$a_2 = \frac{5}{7} \cdot g \cdot \left(\eta\mu\phi - \frac{\ell}{R} \sigma\upsilon\nu\phi \right).$$

Τελικά προκύπτει $a_2 < a_1$.



Κεφαλός Ευθύμιος
Φυσικός – συγγραφέας.
mail: barkefala@yahoo.gr